

Моделирование аномально больших поверхностных волн в океане

Р. В. Шамин

Учреждение Российской академии наук
Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН

Новосибирск, 2011

Неустойчивость Релея-Тейлора

"Под термином "волны-убийцы" понимаются волны большой амплитуды, неожиданно появляющиеся на морской поверхности как бы из ниоткуда и так же быстро исчезающие. На английском языке для их обозначения используют термины "freak, rogue or giant waves". Долгое время волны-убийцы являлись предметом морского фольклора. В рассказах бывалых моряков о волнах-убийцах их форма представляется разной: иногда говорят о "стене воды" или о "дырке в море или о нескольких больших волнах ("трех сестрах")... За последние примерно 30-50 лет волны убийцы перешли из разряда фольклора в реальность, и их существование, после получения инструментальных данных, можно считать доказанным." (Куркин А. А., Пелиновский Е. Н. Волны-убийцы: факты, теория и моделирование. — Нижний Новгород: Нижегородский гос. тех. университет, 2004.)

Волны-убийцы: фотографии



Рис.: Волна-убийца с танкера

Волны-убийцы: фотографии



Рис.: Волна-убийца с танкера

Волны-убийцы: фотографии



Рис.: Волна-убийца и сухогруз

Волны-убийцы: фотографии



Рис.: Волна-убийца на танкер

Волны-убийцы: фотографии



Рис.: Результат встречи с волной-убийцей

Волны-убийцы: фотографии



Рис.: Результат встречи с волной-убийцей

Волны-убийцы: фотографии



Рис.: Результат встречи с волной-убийцей

История вопроса — волны на воде

- Стационарные волны — А.И. Некрасов [1921], Т. Леви-Чивита [1925], далее: П.И. Плотников и Дж. Толанд [2002-2004].
- Первые результаты о разрешимости полных уравнений:
 - в классах аналитических функций: Л.В. Овсянников, В.И. Налимов [1969-1970], Т. Кано и Т. Нисиды [1979].
 - в пространствах Соболева: В.И. Налимов [1974], М. Ёшихара [1982].
- Развитие:
 - трехмерные уравнения в классах аналитических функций: М. Шинброт и Дж. Ридер [1976-1979].
 - Переменное дно: Д. Ланнес [2005].
 - $2D$ и $3D$ в классах Соболева, при общем начальном профиле свободной поверхности: С. Ву [1997-1999].

История вопроса — моделирование волн-убийц

- Линеинные теории

- интегральное представление Маслова: С.Ю. Доброхотов [1983, 2003], И.В. Лавренов [1998], М.Г. Браун [2000-2001], Г. Клаус [2002].
- геометрическая фокусировка: М.Г. Браун [2001], Т.Б. Иоганнессен, С. Сван [2001].
- взаимодействие с течениями: И.В. Лавренов [1998], М.Г. Браун [2000-2001], Д.Х. Пелегрин [1976], Б.С. Вайт, Б. Форенберг [1998]

- Нелинейные теории:

- модуляционная неустойчивость: Е.Н. Пелиновский, К. Кариф [2000], К.Б. Дист, К. Трулсен [1999], К.Л. Хендерсон, Д.Х. Пелегрин, Дж.В. Долд [1999], А.Р. Осборн, М. Онорато, М. Серио [2000], В.Е. Захаров, А.И. Дьяченко, А.О. Прокофьев [2006].
- приближение на мелкой воде: К. Кариф, Е.Н. Пелиновский, Т. Талипова [2000], А.Р. Осборн и др. [1991-2000]

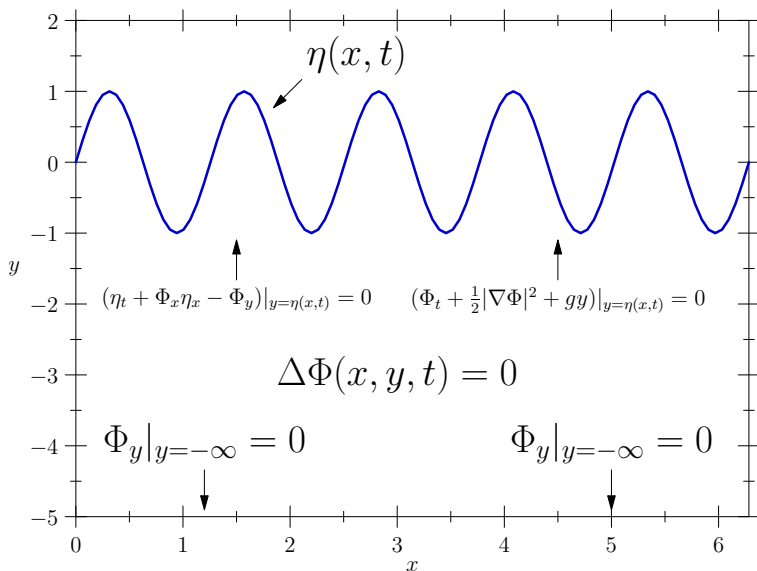
История вопроса — моделирование волн-убийц

- Модели на основе уравнения Захарова и кинетических уравнений:
 - С.И. Бадулин, В.И. Шрира [1995], С.Ю. Анненков, С.И. Бадулин [2000], В.Е. Захаров, А.О. Короткевич, С.И. Бадулин, А.Н. Пушкарев [2003-2008]
- Сильно нелинейные теории:
 - прямое моделирование: К.Л. Хендерсон, Д.Х. Пелегрин, Дж.В. Долд [1999], Дж. Гру, М. Франсиус [2001-2004], В.Дж.Д. Батерман, С. Сван, П.Х. Тэйлор [2001], К. Брандини, С. Грилли [2000], Д.В. Чаликов [1976-1995]
 - конформные переменные: В.Е. Захаров, Е.А. Кузнецов, А.И. Дьяченко, А.О. Прокофьев [1996-2010], Д.В. Чаликов, Д.Шейнин, С.Раинчик [1996-2010], В.П.Рубан [2004-2010]

Монографии:

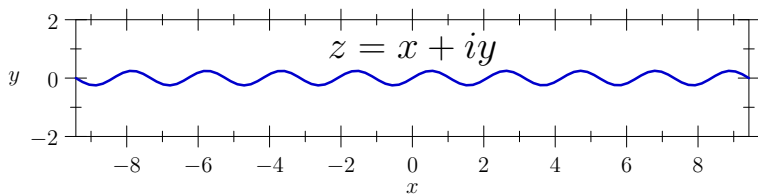
- Kharif C., Pelinovsky E., Slunyaev A. Rogue Waves in the Ocean. Springer, 2009
- Куркин А. А., Пелиновский Е. Н. Волны-убийцы: факты, теория и моделирование. — Нижний Новгород: НГТУ, 2004

Основные уравнения



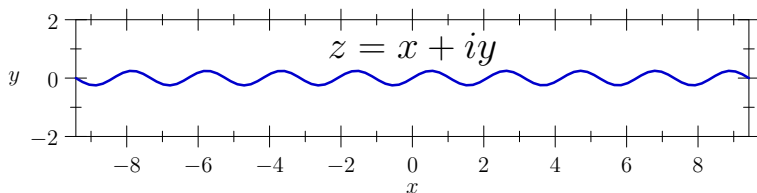
Основные уравнения

Исходная ситуация:

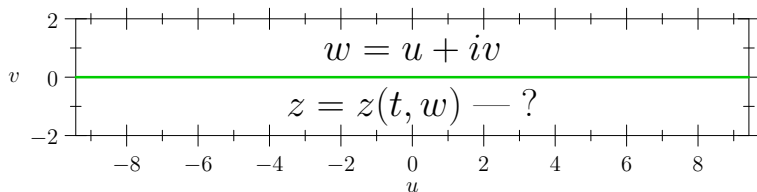


Основные уравнения

Исходная ситуация:



После конформного преобразования:



Основные уравнения

Динамические уравнения формулируются для переменных $R(u, t)$ и $V(u, t)$, аналитичных и ограниченных в нижней полуплоскости:

$$R = \frac{1}{z'_u}, \quad V = i \frac{\partial \Pi}{\partial z}, \quad \Pi = \psi(u, t) + iH[\psi](u, t), \quad \psi(x, t) = \Phi(x, \eta(x, t), t)$$

и имеют вид

$$\begin{aligned} R_t(u, t) &= i(UR_u - U_u R), \\ V_t(u, t) &= i(UV_u - B_u R) + g(R - 1), \\ U &= P(VR^* + RV^*), \\ B &= P(VV^*), \end{aligned} \tag{1}$$

где P — оператор проектирования на нижнюю полуплоскость $P = \frac{1}{2}(1 + iH)$, H — оператор Гильберта для периодического случая

$$H[f](u) = \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_0^{2\pi} \frac{f(u')}{\tan(\frac{u'-u}{2})} du'$$

Основные уравнения

Чтобы учесть внешние воздействия на свободную поверхность, необходимо добавить в эти уравнения следующие слагаемые:

$$\begin{aligned} R_t(u, t) &= i(UR_u - U_u R) + F_1[R, V, t, u], \\ V_t(u, t) &= i(UV_u - B_u R) + g(R - 1) + F_2[R, V, t, u], \end{aligned} \quad (2)$$

здесь F_1 и F_2 — функционалы, зависящие от «истории» неизвестных функций.

Физический смысл

- F_1 — флуктуации свободной поверхности
- F_2 — плотность силы, действующая на свободную поверхность.

Использование функционалов

Использование функционалов вместо функций позволяет учесть взаимодействие свободной поверхности и воздуха.

Множество решений

Для $s \geq 0$ обозначим неограниченную область

$Q_s = \{w = u + iv \in \mathbb{C} : 0 < u < 2\pi, -\infty < v < s\}$. Рассмотрим пространство E_s функций аналитичных в Q_s , представленные в виде: $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k e^{-ikw}$ с нормой $\|f\|_{E_s}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|^2 e^{2sk}$.

Мы выбираем множество M_T^s следующим образом:

$$\begin{aligned} A(t, u) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) e^{-iku}, \\ \max_{t \in [0, T]} |a_k(t)| &\leq C e^{-s|k|}, \\ a_k &\in C^2[0, T]. \end{aligned} \tag{3}$$

На практике

В практических вычислениях условие (3) означает экспоненциальное убывание по модулю коэффициентов a_k , что является необходимым условием для эффективного проведения расчетов.

Аппроксимация дифференциальными включениями

Будем рассматривать следующую задачу: для заданных $\varepsilon \geq 0$ и $s > 0$ найти:

$$0 < T_\varepsilon < \mathbb{T}, \quad R, V \in M_{T_\varepsilon}^s, \quad \delta_R, \delta_V \in L_\infty(0, T_\varepsilon; E_0),$$

$$\|\delta_R\|_{L_\infty(0, T_\varepsilon; E_0)} \leq \varepsilon, \quad \|\delta_V\|_{L_\infty(0, T_\varepsilon; E_0)} \leq \varepsilon,$$

удовлетворяющие уравнениям:

$$R_t(u, t) = i(UR_u - U_u R) + \delta_R(u, t)$$

$$V_t(u, t) = i(UV_u - B_u R) + g(R - 1) + \delta_V(u, t)$$

или записанные как включения:

$$R_t(u, t) \in B_\delta(i(UR_u - U_u R))$$

$$V_t(u, t) \in B_\delta(i(UV_u - B_u R) + g(R - 1))$$

Теорема

Пусть $LT(\varepsilon) = \sup\{T_\varepsilon\}$, тогда

$$LT(\varepsilon) > 0, \quad \varepsilon > 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} LT(\varepsilon) = LT(0) > 0.$$

Пусть мы нашли такие функции R и V , что:

$$R(u, t) = \sum_{k=0}^N r_k(t) e^{-iku},$$

$$V(u, t) = \sum_{k=0}^N v_k(t) e^{-iku}.$$

Пусть мы нашли такие функции R и V , что:

$$R(u, t) = \sum_{k=0}^N r_k(t) e^{-iku},$$
$$V(u, t) = \sum_{k=0}^N v_k(t) e^{-iku}.$$

Тогда, подставляя эти функции в уравнение, мы получим:

$$\delta_R(u, t) = \sum_{k=0}^{3N} \delta_{rk}(t) e^{-iku},$$
$$\delta_V(u, t) = \sum_{k=0}^{3N} \delta_{vk}(t) e^{-iku}.$$

Пусть мы нашли такие функции R и V , что:

$$R(u, t) = \sum_{k=0}^N r_k(t) e^{-iku},$$
$$V(u, t) = \sum_{k=0}^N v_k(t) e^{-iku}.$$

Тогда, подставляя эти функции в уравнение, мы получим:

$$\delta_R(u, t) = \sum_{k=0}^{3N} \delta_{rk}(t) e^{-iku},$$
$$\delta_V(u, t) = \sum_{k=0}^{3N} \delta_{vk}(t) e^{-iku}.$$

Конечность представления

*Приближенные решения и **невязка** представимы в виде конечных сумм!*

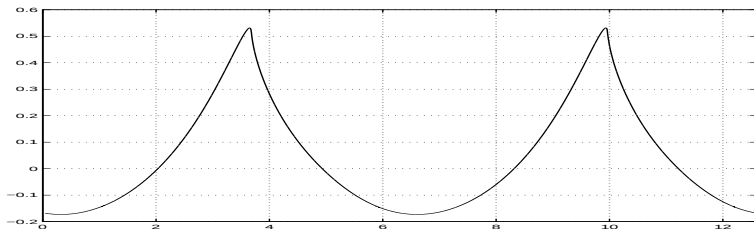
Оценка времени существования решений

Проблема №1

Характерно отсутствие глобальных решений — образование особенностей за конечное время.

Решение

Аппроксимация дифференциальными включениями позволяет оценивать время существования решений уравнений, описывающих поверхностные волны идеальной жидкости.



Проблема №2

На практике теоретические результаты должны быть устойчивыми к условиям машинной арифметики, а также к конечности всех построений.

Проблема №2

На практике теоретические результаты должны быть устойчивыми к условиям машинной арифметики, а также к конечности всех построений.

Решение 1

Предложен эффективный численный метод, позволяющий регуляризовать построение приближенных решений для эволюционных уравнений.

Регуляризация машинной арифметики

Проблема №2

На практике теоретические результаты должны быть устойчивыми к условиям машинной арифметики, а также к конечности всех построений.

Решение 1

Предложен эффективный численный метод, позволяющий регуляризовать построение приближенных решений для эволюционных уравнений.

Решение 2

Приведен пример аппроксимации эволюционных уравнений на конечных множествах. Доказаны теоремы о корректности такого подхода.

Устойчивость волн-убийц

Принципиальный момент!

Поскольку волна-убийца представляет собой экстремальный эффект, то возникает вопрос: будет ли он устойчивым по отношению к начальным данным и внешним возмущениям?

Устойчивость волн-убийц

Принципиальный момент!

Поскольку волна-убийца представляет собой экстремальный эффект, то возникает вопрос: будет ли он устойчивым по отношению к начальным данным и внешним возмущениям?

Теоретический ответ:

С помощью аппроксимации дифференциальными включениями доказано, что решения, представляющие волны-убийцы, устойчивы по начальным данным и внешним воздействиям на любом конечном временном интервале $[0, T]$.

Устойчивость волн-убийц

Принципиальный момент!

Поскольку волна-убийца представляет собой экстремальный эффект, то возникает вопрос: будет ли он устойчивым по отношению к начальным данным и внешним возмущениям?

Теоретический ответ:

С помощью аппроксимации дифференциальными включениями доказано, что решения, представляющие волны-убийцы, устойчивы по начальным данным и внешним воздействиям на любом конечном временном интервале $[0, T]$.

Вычислительный ответ:

С помощью вычислительных экспериментов убедимся в вычислительной устойчивости.

Глава 5. Исследование волн-убийц

Рассмотрим эволюционные уравнения, описывающие поверхностные волны на воде при наличии возмущающей силы

$$\begin{aligned}F_x(t, x) &= A\xi_x(t) \sin(K(t)x), \\F_y(t, x) &= A\xi_y(t) \sin(K(t)x),\end{aligned}$$

где ξ_x, ξ_y — независимые случайные процессы равномерно распределенные на $[-0.5, 0.5]$, K — случайный процесс, принимающий значения $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ с одинаковой вероятностью, $A = 10^{-6}$.

Хотя возмущенное решение заметно отличается от исходного решения, но профили максимальной волны весьма похожи, и время образование волны-убийцы совпадает. Данная вычислительная устойчивость была подтверждена в ходе масштабных вычислительных экспериментов.

Глава 5. Исследование волн-убийц

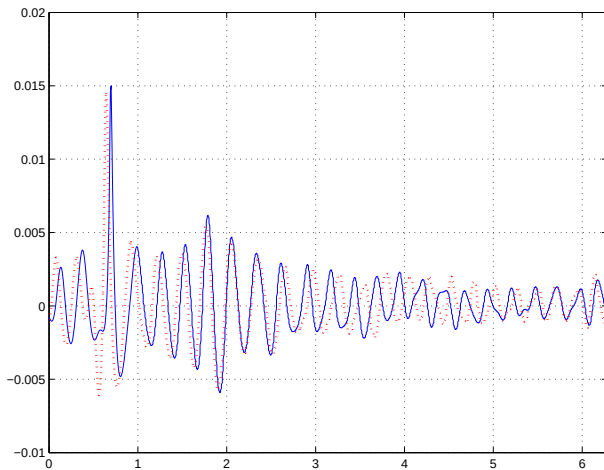


Рис.: Сплошная линия волна без возмущений, точечная линия — волна с возмущением, $t = 41.5$

Вычислительные эксперименты

Начальные условия определялись как ансамбль бегущих в одну сторону волн со средним значением волнового числа $K_0 = 25$. Мы предполагали, что начальное возмущение поверхности задается суммой гармоник со случайными фазами

$$\eta_0(x) = \sum_{-\frac{1}{2}K_{max}}^{\frac{1}{2}K_{max}} \phi(k - k_0) \cos(kx - \xi_k), \quad (4)$$

где K_{max} — полное число спектральных мод, ξ_k — случайная величина, равномерно распределенная на интервале $-\frac{1}{2}K_{max} < k < \frac{1}{2}K_{max}$. Начальные значения поля скоростей предполагались связанными с формулами линейной теории.

Функция $\phi(k)$ определялась по формуле

$$\phi(k) = \begin{cases} \delta_k, & |k| > K_w; \\ \kappa \exp(-\alpha k^2) + \delta_k, & |k| \leq K_w. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь δ_k — независимые случайные параметры, равномерно распределенные на интервале $-\frac{1}{2}K_{max} < k < \frac{1}{2}K_{max}$. Число $1 \leq K_w \leq 10$ определяло спектральную ширину, κ, α — «внутренние» параметры спектра, определенные так, чтобы «внешние» параметры — квадрат средней крутизны

$$\mu^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta_x^2 dx \text{ и дисперсия } D = \frac{\left(\int_{-K_w}^{K_w} k^2 e^{-\alpha k^2} dk \right)}{\left(\int_{-K_w}^{K_w} e^{-\alpha k^2} dk \right)} \text{ принимали}$$

заданные значения. Вклад в полную энергию случайного шума составлял не более трех процентов.

Вычислительные эксперименты

Было проделано 5000 «элементарных» экспериментов. В каждом эксперименте время менялось до 10^4 , что соответствовало приблизительно 500 периодам волн. Если происходило обрушение волн, счет прекращался досрочно. В расчетах полное число гармоник было $K_{max} = 2048$ или $K_{max} = 4096$ в зависимости от квадрата средней крутизны. Регистрация волн-убийц производилась с помощью амплитудного критерия $\frac{H_{max}}{H_s} \geq 2.1$, где H_{max} — амплитуда самой высокой волны, а H_s — существенная высота волн, т.е. средняя амплитуда одной трети самых высоких волн. Требовалось также, чтобы локальная крутизна волны $|\eta_x|$ превышала критическое значение, т.е. было выполнено условие $\max_{0 < x < 2\pi} |\eta_x| \geq 0.3$. Это требование вызвано физическими соображениями и является весьма существенным.

Вычислительные эксперименты

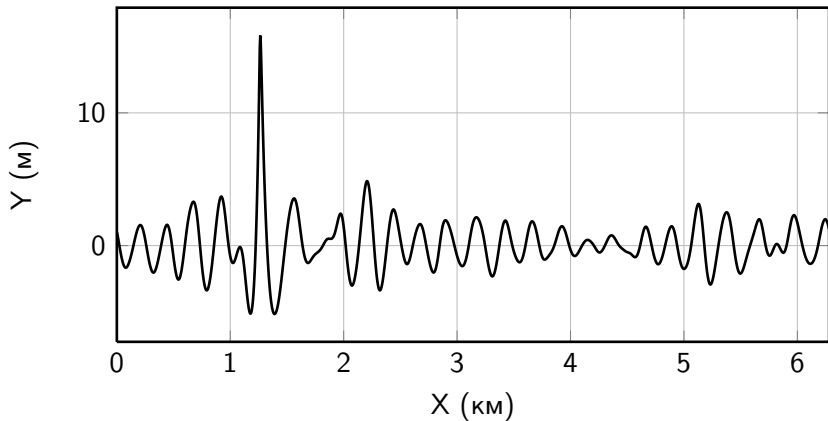


Рис.: Профиль волны-убийцы. Время $t = 3360$ с; крутизна — 0.558

Вычислительные эксперименты

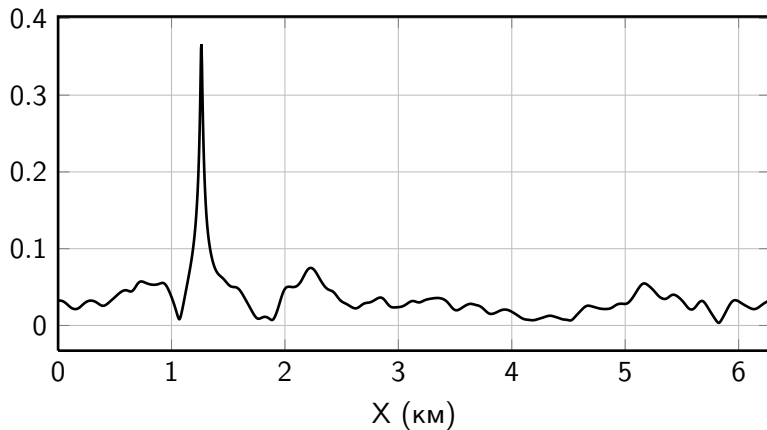


Рис.: Плотность импульса в момент образования волны-убийцы

Вычислительные эксперименты

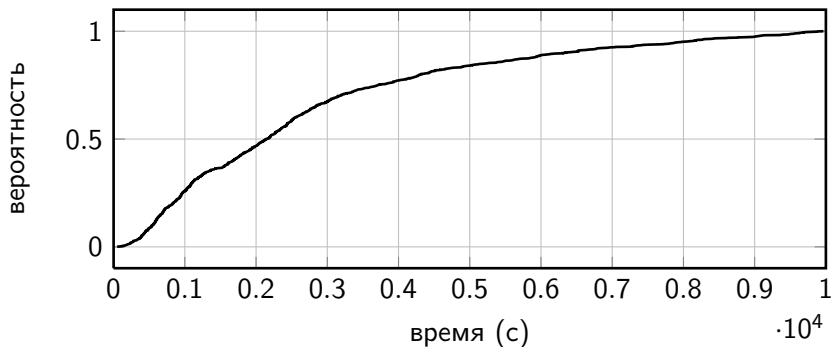


Рис.: Вероятность возникновения волн-убийц от времени

Вычислительные эксперименты

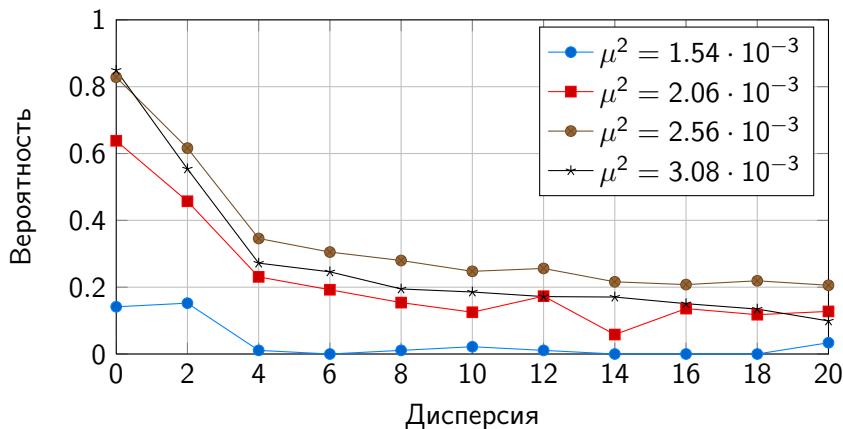


Рис.: Вероятности возникновения волн-убийц

Разработаны новые методы статистической проверки гипотез о существовании решений. Предложенный оригинальный метод, позволяет оценить вероятность существования решения уравнения по результатам численного решения этого уравнения. Эти результаты могут быть применены к широкому классу операторных уравнений.

«Экономический эффект»

В частности, этот метод позволяет избегать излишних точек в расчетных сетках.

Оперативный прогноз

Предложен метод краткосрочного прогноза возникновения волны убийцы. Метод основан на анализе изменения величин

$$H(t) = \frac{H_{max}(t)}{H_s(t)}, \quad \mu_{max}(t)$$

где $H_{max}(t)$ — максимальная амплитуда в момент времени t , а $H_s(t)$ — существенная высота волн, $\mu_{max}(t)$ — максимальная крутизна свободной поверхности в момент t . Прогноз возникновения волны-убийцы регистрируется если выполнены условия:

$$\frac{H(t + \Delta) - H(t)}{\Delta} \geq \alpha,$$
$$\frac{\mu_{max}(t + \Delta) - \mu_{max}(t)}{\Delta} \geq \beta,$$

где $\Delta > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ — параметры метода. Наилучший выбор параметров метода прогноза возникновения волн-убийц показал точность прогноза в 68.94%.

Оперативный прогноз

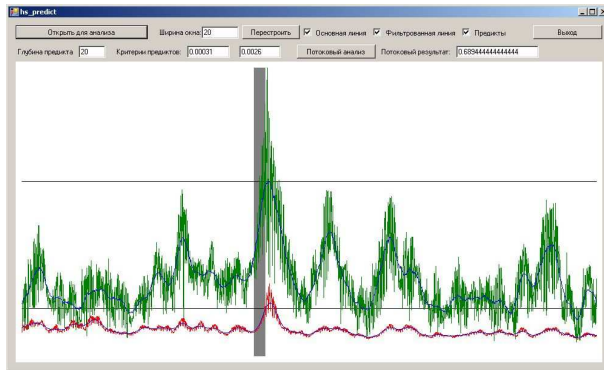


Рис.: Рабочий экран программы для предсказания возникновения волны-убийцы

Теоретико-игровая трактовка

Рассмотрим совместную динамику N волн $w_i(t)$, $i = 1, \dots, N$. Пусть каждая волна обладает двумя видами числовых характеристик:

$$\alpha_j(w_i), j = 1, \dots, N_A; \quad \beta_j(w_i), j = 1, \dots, N_B.$$

Характеристики первой группы являются исчерпаемыми (энергия, импульс и т.д.), а второй неисчерпаемыми (крутизна, амплитуда и т.д.):

$$\sum_{i=1}^N \alpha_j(w_i(t)) \leq A_j, \quad j = 1, \dots, N_A.$$

Пусть $\beta_1(w_i) = H(w_i(t))$ — амплитуда волны $w_i(t)$.

Функция выигрыша $G_i(w_1(T), \dots, w_N(T)) \sim H(w_i(T))$.

Теоретико-игровая трактовка

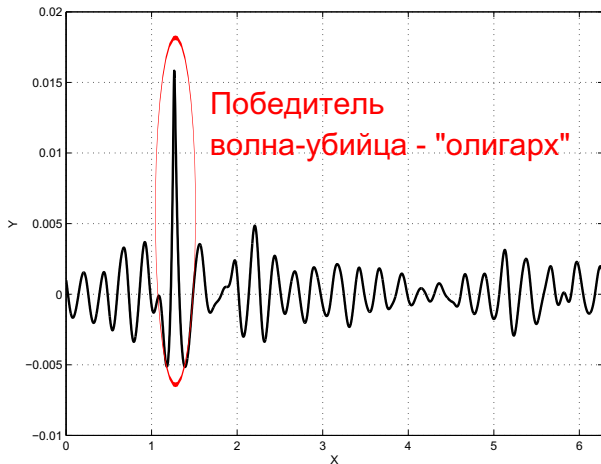
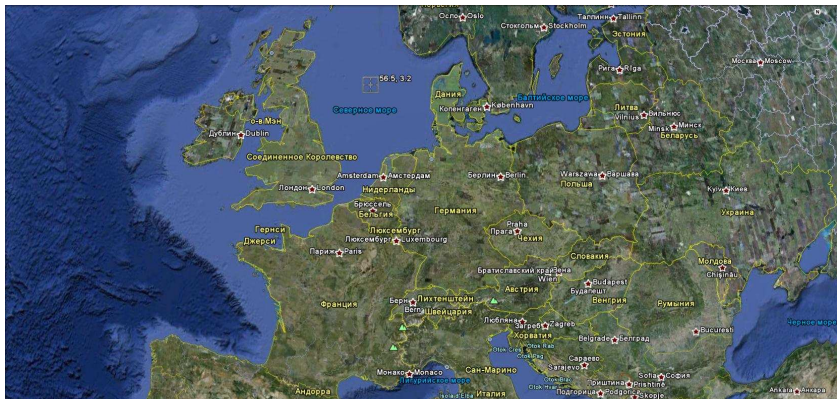


Рис.: Несправедливая игра

Сравнение с натурными данными

Одним из наиболее известных случаев инструментальной записи волны-убийцы является регистрация на норвежской нефтяной платформе 1 января 1995 года в Северном море (56.5° с.ш., 3.2° в.д.) аномальной волны, получившей название Новогодней волны.



Сравнение с натурными данными

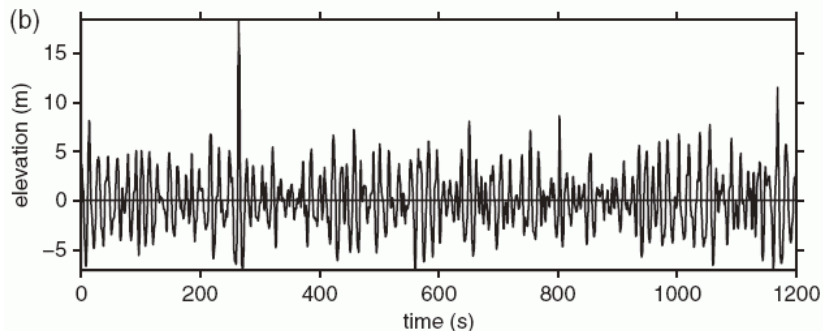


Рис.: Волнограмма Новогодней волны

Сравнение с натурными данными

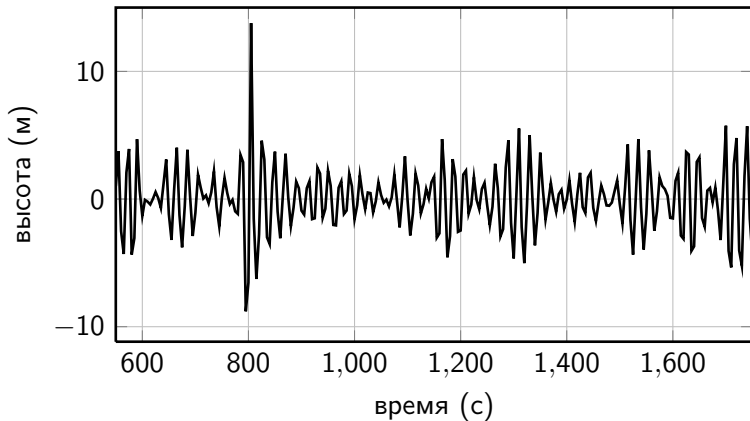


Рис.: Волнограмма численного эксперимента

Сравнение с натурными данными

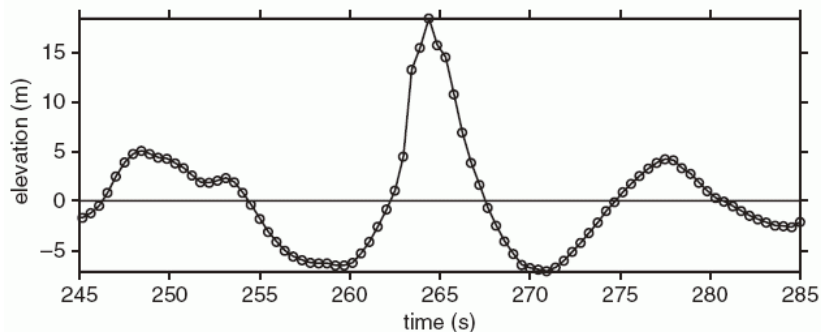


Рис.: Подробная волнограмма Новогодней волны

Сравнение с натурными данными

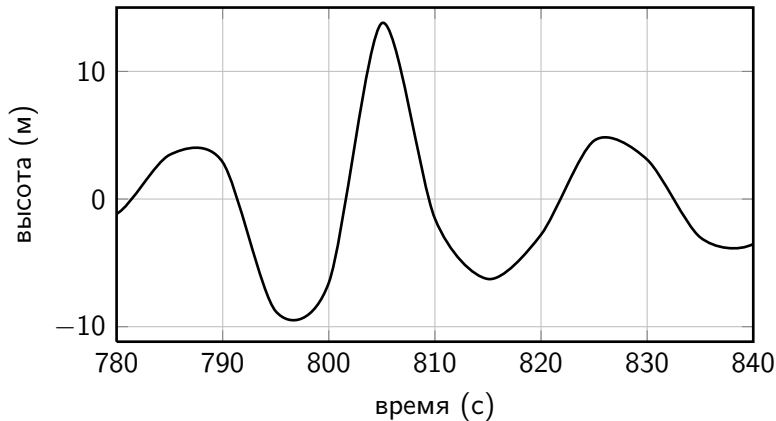


Рис.: Подробная волнограмма численного эксперимента

Основные результаты

- 1 Установлена корректность точной математической модели поверхностных волн в океане вплоть до момента обрушения.
- 2 Предложен новый метод построения точных решений уравнений, описывающих поверхностные волны на основе дифференциальных включений.
- 3 Доказана сходимость численных методов расчета волн на воде. Предложен метод регуляризации этих вычислительных процедур в условиях машинной точности.
- 4 На основе проведенных масштабных вычислительных экспериментов получены оценки вероятности возникновения волн-убийц в зависимости от средней крутизны и спектральных параметров начального волнения.
- 5 Исследованы вопросы устойчивости волн-убийц относительно возмущений начальных данных и внешних воздействий в ходе вычислительных экспериментов.
- 6 Предложены теоретико-игровые трактовки возникновения волн-убийц. Построена формальная игра, где в качестве игроков выступают отдельные волны. При этом факт возникновения anomalously большой волны трактуется как несправедливая игра.